Решения задач школьной олимпиады по математике (с критериями проверки).

*Пояснительная записка.*

*Здесь представлены возможные варианты решения задач школьной олимпиады по математике, проводимой 10.10.2019 года в школах Белокатайского района, а также критерии их проверки. Практически всегда, решения учащихся отличаются от предложенных, – это, так называемые, "авторские" решения, поэтому критерии являются больше рекомендациями, чем предписанием. В каждом классе предлагается пять задач на решение которых отводится 90 минут( можно больше, на усмотрение учителя) и оцениваются они максимальным количеством баллов – 7.*

**Школьная олимпиада по математике в 6 классе.**

*Критерии оценивания*

|  |  |
| --- | --- |
| **Баллы** | **Пояснения** |
| **7** | Полное верное решение. |
| **6** | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на  решение. |
| **5** | Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не  рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после  небольших исправлений или дополнений. |
| **4** | Верно рассмотрен один из двух существенных случаев. |
| **3** | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. |
| **2** | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при  ошибочном решении). |
| **1** | Записан только ответ и он правильный, решения нет. |
| **0** | Решение неверное, продвижения отсутствуют.  Решение отсутствует и ответ неверный. |

**1) На скотном дворе гуляли гуси и поросята. Мальчик сосчитал количество голов, их оказалось 30, а затем он сосчитал количество ног, их оказалось 84. Сколько гусей и сколько поросят было на школьном дворе?** *(7 баллов)*  
*Решение:*1 - Представьте, что все поросята подняли по две ноги вверх тогда на земле осталось стоять 30 ∙ 2 = 60 ног.  
2 – А сколько тогда подняли вверх 84 - 60 = 24 ноги – это ноги поросят, значит их подняли 24 : 2 = 12 поросят.  
3 - Так как голов 30, то 30 - 12 = 18 гусей.   
*Ответ:* 12 поросят и 18 гусей.

**2)** **В детском магазине продают трехколесные и двухколесные велосипеды, причем и тех и других поровну.  
Сколько колес может быть у всех этих велосипедов вместе: 1) 16; 2) 24; 3) 25; 4) 28; 5) 33 ?** *(7 баллов)**Решение:*  
Надо сложить между собой количество колес двух видов велосипедов, так как нужно сравнивать кратность общего числа колес велосипедов к количеству суммы колес двух видов:  
3 + 2 = 5  
3 - это количество колес трехколесного велосипеда, 2 - это количество колес двухколесного велосипеда.   
Далее рассуждаем так: если количество велосипедов одинаковое (и 2-х и 3-х колесных), то общее число колес должно делится на 5 обязательно без остатка.   
- при варианте 1) 16 : 5 = 3 (остаток 1).  
- при варианте 2) 24 : 5 = 4 (остаток 4) – то есть опять остались лишние колеса.  
- при варианте 3) 25 : 5 = 5 . Без остатка – значит вариант подходит,   
- при варианте 4) 28 : 5 = 5.(в остатке 3 колеса) – не подходит,   
- при варианте 5) 33 : 5 = 6 (остаток 3).  
*Ответ:*  
Правильный вариант ответа 3), так как 25 делится на 5 без остатка (25 : 5 = 5).

**3) Назовем число зеркальным, если слева направо оно «читается» так же, как справа налево. Например, число 12321 – зеркальное. а) Напишите какое-нибудь зеркальное пятизначное число, которое делится на 5. б) Сколько существует пятизначных зеркальных чисел, которые делятся на 5?** *(7 баллов)*

*Решение:* а) Зеркальное пятизначное число должно иметь вид ABCBA. Раз оно делится на 5, значит, последняя цифра либо 5, либо 0. Но 0 не подходит, поскольку первая цифра (которая равна последней) не может быть 0. Значит, число имеет вид 5BCB5. Например, 52325.

б) Количество таких чисел определяется так: на втором месте можно выбрать 10 цифр (от 0 до 9), на третьем – независимо от второго – тоже 10. Четвертая цифра однозначно определяется – она совпадает со второй, поэтому на количество вариантов не влияет. А две цифры по 10 вариантов в совокупности дают нам 10 · 10 = 100 вариантов. 5 **0 0** 0 5,  5 **0 1** 0 5,  5 0 2 0 5, ….,  5 **9 9** 9 5 — вторая и третья цифры «перебирают» все варианты от 00 до 99, т.е. ровно 100 вариантов.

*Ответ:* а) 52325; б) 100 вариантов.

**4)**  **Кассир продал все билеты в первый ряд кинотеатра, причем по ошибке на одно из мест было продано два билета. Сумма номеров мест на всех этих билетах равна 857. На какое место продано два билета?** *(7 баллов)*  
*Решение:*  
Сколько мест могло быть в первом ряду. Во-первых, их не больше 40, так как сумма натуральных чисел от 1 до 41 равна 861. Во-вторых, их не меньше 40, так как сумма натуральных чисел от 1 до 39 равна 780, и даже после прибавления к ней 39, результат будет меньше 857. Значит в первом ряду ровно 40 мест. Теперь несложно определить, на какое место был продан лишний билет: 1 + … + 40 = 820; 857 – 820 = 37.  
*Ответ:* на 37 место.

**5) Буратино и Пьеро бежали наперегонки. Пьеро весь путь бежал с одной и той же скоростью, а Буратино первую половину пути бежал вдвое быстрее, чем Пьеро, а вторую половину – вдвое медленней, чем Пьеро. Кто победил?** *(7 баллов)*

*Решение:*  
На вторую половину пути Буратино потратил ровно столько времени, сколько Пьеро на весь путь. А ведь сколько-то времени у Буратино ушло и на первую половину пути. Так что победил Пьеро.

*Ответ:* победил Пьеро.

**Школьная олимпиада по математике в 5 классе.**

*Критерии оценивания*

|  |  |
| --- | --- |
| **Баллы** | **Пояснения** |
| **7** | Полное верное решение. |
| **6** | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на  решение. |
| **5** | Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не  рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после  небольших исправлений или дополнений. |
| **4** | Верно рассмотрен один из двух существенных случаев. |
| **3** | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. |
| **2** | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при  ошибочном решении). |
| **1** | Записан только ответ и он правильный, решения нет. |
| **0** | Решение неверное, продвижения отсутствуют.  Решение отсутствует и ответ неверный. |

**1)** **Девять осликов за 3 дня съедают 27 мешков корма. Сколько корма надо пяти осликам на 5 дней?** *(7 баллов)*  
*Решение:*  
1 шаг 9 осликов в 1 день - 27 : 3= 9м.  
2 шаг 1 ослик в 1 день - 9 : 9 = 1 м.  
3 шаг 5 осликов в 1 день - 5 ∙ 1 = 5 м.   
4 шаг 5 осликов за 5 дней - 5 ∙ 5 = 25 м.

*Ответ:* 25 м.

**2)** **Прямоугольник состоит из двух одинаковых квадратов, имеющих общую сторону. Его периметр равен 12 см. Найдите площадь прямоугольника.** *(7 баллов)*

*Решение:*

*а* *а*  Пусть сторона квадрата равна *а*, так как прямоугольник

состоит из двух одинаковых квадратов, то его длина равна 2а.

*а* Р = 2∙ (2а + а) = 12, т.е. 2∙ 3а = 12, значит, а = 12 : 6 = 2 см.

Следовательно, площадь прямоугольника равна S = 2∙(2+2)=8см.

*Ответ:* 8 см.

**3)** **Ваня, Коля и Антон могут одинаково быстро вскопать землю лопатой.  
Если любые два из этих мальчиков будут работать вместе, то справятся с земельным участком за полтора часа. За какое время ребята вскопают тот же участок, если будут работать все трое вместе?** *(7 баллов)*   
*Решение:*Любые две мальчика справляются с уборкой за полтора часа (90 минут). Каждый из этих мальчиков вскопает одну вторую часть земельного участка. Если двое мальчиков за 90 мин копают участок, то по отдельности они вскопают в 2 раза дольше:  90 ∙ 2 = 180 минут.  
Нам надо узнать, за какое время они вместе втроем справятся с заданием. Вместе им придется вскопать каждому одну треть земельного участка, то есть выполнить задание в 3 раза быстрее 180 : 3 = 60 минут.  
*Ответ:* втроем ребята перекопают земельный участок за 1 час.

**4)** **Кенгуру мама прыгает за 1 секунду на 3 метра, а её маленький сынишка прыгает на 1 метр за 0,5 секунды. Они одновременно стартовали от бассейна к эвкалипту по прямой.  
Сколько секунд мама будет ждать сына под деревом, если расстояние от бассейна до дерева 240 метров?** *(7 баллов)*  
*Решение :*1 шаг 240 : 3 = 80 (с) скакала мама Кенгуру   
2 шаг сын за 0,5 с - 1 м, за 1 с - 2 м   
3 шаг 80 \* 2 = 160 (м) проскачет кенгурёнок за 80 с  
4 шаг 240 - 160 = 80 (м) осталось проскакать кенгурёнку когда   
мама уже под эвкалиптом  
5 шаг 80 : 2 = 40 (с)   
*Ответ:* 40 секунд.

**5)**  **Делимое в 6 раз больше делителя, а делитель в 6 раз больше, чем частное. Найдите делимое, делитель и частное.** *(7 баллов)*

*Решение:*

Пусть  – делимое, – делитель, а  – частное, тогда . Так как делимое в 6 раз больше делителя, то частное . А так как делитель в 6 раз больше, чем частное, то . В результате рассуждений имеем , откуда 

*Ответ:*216**.**

**Школьная олимпиада по математике в 7 классе.**

*Критерии оценивания*

|  |  |
| --- | --- |
| **Баллы** | **Пояснения** |
| **7** | Полное верное решение. |
| **6** | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на  решение. |
| **5** | Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не  рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после  небольших исправлений или дополнений. |
| **4** | Верно рассмотрен один из двух существенных случаев. |
| **3** | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. |
| **2** | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при  ошибочном решении). |
| **1** | Записан только ответ и он правильный, решения нет. |
| **0** | Решение неверное, продвижения отсутствуют.  Решение отсутствует и ответ неверный. |

**1) В классе 28 учащихся. На классном вечере первая по алфавиту девочка класса танцевала с 3 мальчиками, вторая - с 4, третья - с 5,.., последняя – со всеми мальчиками класса. Сколько девочек учится в классе?** *(7 баллов)*

*Решение:*

Обозначим количество девочек в классе за , тогда мальчиков в классе . Если первая танцевала с 3 мальчиками, вторая – с 4,..., то последняя будет по номеру п-ой, и танцевать она должна с  мальчиками. Следовательно, , откуда .

*Ответ:* 13 девочек.

**2) Золотоискатель Джек добыл 9 кг золотого песка. Сможет ли он за три взвешивания отмерить 2 кг песка с помощью чашечных весов с одной гирей – 200 г.?**  *(7 баллов)*

*Решение:* Кладем на одну чашу весов гирю и весь песок делим на две части так, чтобы чаши весов уравновесились: 4,6 кг=4,4 кг + 0,2 кг. Далее песок со второй чаши делим на две равные части с помощью уравновешивания весов без использования гирь: 2,2 кг = 2,2 кг, ну и на последок на любую из чаш ставим гирьку и отсыпаем с этой же чаши песок до уравновешивания: 2,2 кг =2 кг +0,2 кг. Тот песок, что остался на чаше вместе с гирькой будет иметь нужную массу.

*Ответ:* Можно.

**3) Ванна заполняется холодной водой за 6 минут 40 секунд, горячей – за 8 минут. Кроме того, если из полной ванны вынуть пробку, вода вытечет за 13 минут 20 секунд. Сколько времени понадобится, чтобы наполнить ванну полностью, при условии, что открыты оба крана, но ванна не заткнута пробкой?** *(7 баллов)*

*Решение:* Переведем все временные промежутки в секунды. Чтобы наполнить ванну холодной водой требуется 400 секунд, значит, за одну секунду наполняется 1/400 часть ванны. Аналогично для горячей воды. За одну секунду наполняется 1/480 часть ванны. Аналогично для спуска воды. За одну секунду выливается 1/800 часть ванны. Тогда величина равная количеству воды, пребывающей в ванну каждую секунду при условии что оба крана открыты, а пробка не заткнута определится следующим равенством: . Таким образом, потребуется пять минут, чтобы наполнить ванну.

*Ответ:* 5 минут.

**4) В спортивной секции девочки составляют 60 % числа мальчиков. Сколько процентов от числа всех участников секции составляют девочки?** *(7 баллов)*

*Решение:* Пусть х - мальчиков в секции, тогда девочек 0,6х. Всего детей в секции х+0,6х=1,6х. Составим пропорцию: 1,6х : 100% = 0,6х : у%

у% = (100 ∙ 0,6х) : 1,6х

у% = 37,5%

*Ответ:* 37,5%

**5) Каждый из 10 гномов либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Известно, что каждый из них любит ровно один сорт мороженого: сливочное, шоколадное или фруктовое. Сначала Белоснежка попросила поднять руки тех, кто любит сливочное мороженое, и все подняли руки, потом тех, кто любит шоколадное мороженое – и половина гномов подняли руки, потом тех, кто любит фруктовое мороженое – и руку поднял только один гном. Сколько среди гномов правдивых?** *(7 баллов)*

*Решение:*Из условия задачи ясно, что правдивые гномы могут любить только сливочное мороженое, а лживые — только шоколадное или фруктовое. Именно поэтому все гномы сказали, что любят сливочное. Заполним табличку — отметим, что должны говорить правдивые и лживые гномы, в зависимости от того, какой сорт им нравится. Правдивый — любит только сливочное, признает это, а про остальные сорта говорит, что не любит. Лживый гном, который любит шоколадное мороженое, скажет «нет» в ответ на второй вопрос, и «да» — в ответ на третий. Если же лживый гном любит фруктовое, то он ответит «да» на вопрос про шоколадное, и «нет» — про фруктовое.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | Сливочное | Шоколадное | Фруктовое |
| Правдивый | Любит | да | нет | нет |
| **Говорит** | **да** | нет | нет |
| Лживый | Любит | нет | да | нет |
| **Говорит** | **да** | нет | **да** |
| Лживый | Любит | нет | нет | да |
| **Говорит** | **да** | **да** | нет |

Из третьего столбца мы видим, что в любви к фруктовому мог признаться только лжец, который любит шоколадное мороженое. Причем такой среди гномов — всего один. А из второго столбца мы видим, что отрицают любовь к шоколадному мороженому все правдивые гномы и лжецы, которые любят шоколад. Но таких лжецов, как мы уже узнали, всего один. Поэтому на второй вопрос ответили «нет» все правдивые гномы и один лжец. То есть правдивых гномов — половина минус один.

*Ответ:* 4

**Школьная олимпиада по математике в 8 классе.**

*Критерии оценивания*

|  |  |
| --- | --- |
| **Баллы** | **Пояснения** |
| **7** | Полное верное решение. |
| **6** | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на  решение. |
| **5** | Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не  рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после  небольших исправлений или дополнений. |
| **4** | Верно рассмотрен один из двух существенных случаев. |
| **3** | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. |
| **2** | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при  ошибочном решении). |
| **1** | Записан только ответ и он правильный, решения нет. |
| **0** | Решение неверное, продвижения отсутствуют.  Решение отсутствует и ответ неверный. |

**1)**  **Над имеющимся числом разрешается производить два действия: умножить его на 2 или прибавить к нему 2. За какое минимальное число действий можно из единицы получить триста?** *(7 баллов)*

*Решение:*

Задача решается с конца:

1. 300 : 2 = 150
2. 150 – 2 = 148
3. 148 : 2 = 74
4. 74 – 2 = 72
5. 72 : 2 = 36
6. 36 : 2 = 18
7. 18 – 2 = 16
8. 16 : 2 = 8
9. 8 : 2 = 4

10) 4 : 2 = 2

11) 2 : 2= 1

*Ответ:* за 11 действий

**2) На затонувшей каравелле XIV века были найдены шесть мешков с золотыми монетами. В первых четырех мешках оказалось по 60, 30, 20 и 15 золотых монет. Когда подсчитали монеты в оставшихся двух, кто-то заметил, что число монет в мешках составляет некую последовательность. Приняв это к сведению, смогли бы вы сказать, сколько монет в пятом и шестом мешках?** *(7 баллов)*

*Решение:* Можно заметить, что , , , а . Тогда, если по утверждению, наблюдается последовательность, то в пятом мешке было , а в шестом мешке 

*Ответ:* 12 и 10.

**3) Вася задумал два числа. Их сумма равна их произведению и равна их частному. Какие числа задумал Вася?** *(7 баллов)*

*Решение:*

Запишем условие в следующем виде: a + b = a · b = a : b

Из второго равенства a · b = a : b получаем, что b2= 1, т.е b = +1 или b = -1.

Рассмотрим первое равенство a + b = a · b.

При b = 1 оно не имеет решений (1 = 0). **При b = -1 получаем a = 0,5.**

a + b = 0,5 — 1 = — 0,5

a · b = 0,5 · (-1) = — 0,5

a : b = 0,5 : (-1) = — 0,5

*Ответ:* 0,5 и – 1

**4) Треугольник ABC – прямоугольный треугольник с гипотенузой AB. На прямой AB по обе стороны от гипотенузы отложены отрезки AK = AC и BM = BC. Найдите угол KCM.** *(7 баллов)**Решение:*   
По теореме о внешнем угле треугольника сумма углов CKA и KCA равна углу CAB. Поскольку треугольник CAK – равнобедренный, KCA = CKA = CAB / 2. Аналогично, BCM = BMC = CBA / 2. Таким образом, KCM = KCA + ACB + BCM = ACB + ( CAB + CBA) / 2 = 900 + 450 = 1350.

*Ответ:* 1350

**5) Вода Тихого океана содержит 3,5% соли (по весу). Сколько пресной воды нужно долить к 40 кг такой воды, чтобы содержание соли в смеси составило 0,5%?**

*(7 баллов)*

*Решение:* 40 кг воды Тихого океана содержат кг соли. Для того, чтобы эта масса после добавления пресной воды составила ,нужно, чтобы общая масса воды стала равна  кг. Значит, долить надо кг. пресной воды.  
Альтернативное решение: Процентное содержание соли определяется отношением массы чистой соли к массе раствора. Так как в 40 кг раствора (морской воды) содержится 1,4 кг, то , но если я добавлю  кг чистой воды, то раствор станет полупроцентным, то есть:  
 кг.  
*Ответ:* 240 кг.

**Школьная олимпиада по математике в 9 классе.**

*Критерии оценивания*

|  |  |
| --- | --- |
| **Баллы** | **Пояснения** |
| **7** | Полное верное решение. |
| **6** | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на  решение. |
| **5** | Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не  рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после  небольших исправлений или дополнений. |
| **4** | Верно рассмотрен один из двух существенных случаев. |
| **3** | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. |
| **2** | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при  ошибочном решении). |
| **1** | Записан только ответ и он правильный, решения нет. |
| **0** | Решение неверное, продвижения отсутствуют.  Решение отсутствует и ответ неверный. |

1. **Найдите все трёхзначные числа, у которых вторая цифра в четверо больше первой, а сумма всех трёх цифр равна 14.** *(7 баллов)*

*Решение:* Если первая цифра не меньше 3, то вторая - не меньше 12, что не возможно. Значит, первая цифра 1 или 2. Далее число строится по условию.

*Ответ:* 149, 284.

1. **Сколько было брёвен, если из них с помощью 52 распилов получили 72 чурки? Каждый распил производится только с одним бревном.** *(7 баллов)*

*Решение:* Так как каждый раз при распиле одного бревна добавляется одна чурка, а вторую считаем самим бревном. Значит если 52 распила, то увеличилось количество чурок-бревен на 52. Каждый новый распил добавляет новую чурку, поэтому сначала было  чурок - бревен.

*Второе решение:* За x обозначаем кол-во бревен. За y обозначаем кол-во распилов на одном бревне. За z обозначаем кол-во поленьев, получившихся с одного бревна.

Имеем такую систему:

z = y+1;

x ∙ y = 52;

x ∙ z = 72;

Из второго уравнения выражаем y, из третьего z, подставляем все в первое уравнение:

y = 52 : x; z = 72 ∙ x;

72 : x = 52 : x+1;

Приводим к общему знаменателю:  
72=52+x;

72-52=x;

x=20 бревен.

*Ответ:* 20 бревен.

1. **Среди целых чисел от 8 до 17 включительно зачеркните как можно меньше чисел так, чтобы произведение оставшихся было точным квадратом. В ответе укажите сумму всех вычеркнутых чисел.**  *(7 баллов)*

*Решение:*Чтобы произведение было точным квадратом, нужно, чтобы каждый простой множитель входил в него в четной степени. В произведение 8 · 9·…· 17 в нечетной степени входят 2, 7, 11, 13 и 17. Значит, мы обязаны вычеркнуть сомножители 11, 13 и 17. А вот чтобы «убить» лишние простые множители 2 и 7, хватит одного вычеркнутого сомножителя 14. Итого сумма вычеркнутых чисел равна 11 + 13 + 14 + 17 = 55.

*Ответ:* 55.

1. **В прямоугольном треугольнике с катетами 3 и 4 см проведены высота прямого угла и медиана большего из острых углов. В каком отношении высота делит медиану?** *(7 баллов)*

*Решение:*

А

C

B

D

E



F

G

Проведем отрезок *DF*, параллельный высоте *АЕ*. По теореме Фалеса, он разделит отрезок *BE* пополам. По теореме Пифагора, гипотенуза треугольника *АВС* равна 5 см. Кроме этого , и . Отсюда: . Отсюда . То есть *ВЕ=3,2*, *FE=1,6*, *EC=1,8*. Из параллельности отрезков *DF* и *GE* следует, что .

*Ответ:* 9 : 8, считая от основания.

1. **Из 22 кг свежих грибов получается 2,5 кг сухих грибов, содержащих 12% воды. Каков процент воды в свежих грибах?** *(7 баллов)*

*Решение:*

Сухие грибы содержат  кг. воды, поэтому в них 2,2 кг. твердого вещества. Столько же твердого вещества содержалось до усушки и в свежих грибах, но оно составляло там , следовательно, вода составляла в свежих грибах 90%.  
Альтернативное решение: Процентное содержание воды в грибах определяется отношением массы чистой воды к массе грибов. Так как в 2,5 кг грибов содержится 0,3 кг воды, то , но если я "добавлю" 19,5 кг чистой воды к этим грибам, то грибов станет 22 кг, а содержание в них воды будет составлять :  
.  
*Ответ:* 90%.

**Школьная олимпиада по математике в 10 классе.**

*Критерии оценивания*

|  |  |
| --- | --- |
| **Баллы** | **Пояснения** |
| **7** | Полное верное решение. |
| **6** | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на  решение. |
| **5** | Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не  рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после  небольших исправлений или дополнений. |
| **4** | Верно рассмотрен один из двух существенных случаев. |
| **3** | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. |
| **2** | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при  ошибочном решении). |
| **1** | Записан только ответ и он правильный, решения нет. |
| **0** | Решение неверное, продвижения отсутствуют.  Решение отсутствует и ответ неверный. |

**1) Число n умножили на сумму его цифр и получили 1000. Найдите все такие числа.** *(7 баллов)*

*Решение:*

Раскладываем 1000 в произведение двух множителей: 1000 ∙ 1, 500 ∙ 2,  250 ∙ 4, 200 ∙ 5, 125 ∙ 8, 100 ∙ 10, 50 ∙ 20, 40 ∙ 25. Мы получаем два варианта ответа – 125 ∙ 8 или 1000 ∙ 1.

*Ответ:*  125 и 1000.

**2) Решите систему уравнений:**  *(7 баллов)*

*Решение:* Перепишем уравнения: Перемножим оба уравнения и получим

1 = (. После всех преобразований получим квадратное уравнение

2х2 – 5х + 2 = 0, корни которого х1 = и х2 = 2. Подставим и найдём у1 = и у2 = 2.

*Ответ:* ( и (2; 2)

**3) В конце каждого урока физкультуры учитель проводит забег и даёт победителю забега четыре конфеты, а всем остальным ученикам – по одной. К концу четверти Петя заслужил 29 конфет, Коля – 32, а Вася – 37 конфет. Известно, что один из них пропустил ровно один урок физкультуры, участвуя в олимпиаде по математике; остальные же уроков не пропускали. Кто из детей пропустил урок? Объясните свой ответ.** *(7 баллов)*

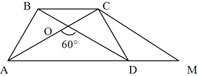
*Решение:* После каждого забега разность количества конфет, полученных любыми

двумя из присутствовавших на уроке школьников, делится на 3 (эта разность равна 0 или 3). Значит, и в конце четверти разность количеств конфет, полученных любыми двумя из посетивших все уроки физкультуры школьников, делится на 3. А из данных чисел 29, 32, 37 разность, делящуюся на 3, дают только числа 29 и 32. Значит, пропустил урок тот школьник, который заработал 37 конфет.

*Ответ:* Вася.

**4) В некоторой трапеции длина одной из диагоналей равна сумме длин оснований трапеции, а угол между диагоналями равен *60* градусов. Доказать, что эта трапеция равнобокая.** *(7 баллов)*

Доказательство:  
проведем из точки В прямую к диагонали АС (**точку пересечения обозначим О**), так, что**ВС = СО**, тогда**АО = АС - СО = (ВС + AD) - ВС = AD**имеем два равнобедренных треугольника ∆ВСО **(ВС = СО)** и ∆AOD**(АО = AD)****<CBO = <COB**(∆BCO- равнобедренный)**<AOD = <ADO**(∆AOD- равнобедренный)**<BCO = <OAD**(накрест лежащие) ==>**<CBO = <COB = <AOD = <ADO**Раз**<AOD = <BOC**, а стороны АО и СО этих углов лежат на одной прямой, то**<AOD  и  < BOC**–вертикальныеи, значит,  ВО и OD лежат на одной прямой ==>O - точка пересечения диагоналей AC и BD, тогда**<BOC = AOD = 60°** (по условию)**<CBO = <COB = <AOD = <ADO = 60° , <BCO = <OAD = 180 - <AOD - <ODA = 60° ==>∆BCO и ∆AOD – равносторонние, т.е. BC = CO = OB**(∆BCO  - равносторонний)**AO = OD = AD**(∆AOD - равносторонний) **<BOA = <COD**(вертикальные) **==>∆BOA = ∆COD**(по двум сторонам и углу между ними), значит, **BA = CD**и делаем вывод, что**ABCD - равнобедренная трапеция, т.е. АВ = СD.**

*Другой вариант решения:* Пусть AD = a, BC = b, AC = a + b. Продолжим AD за точку D на расстояние DM = BC. Тогда очевидно, что ΔАСМ - равносторонний. Но это значит, что ΔАОD и ΔВОС - тоже равносторонние. Отсюда непосредственно следует, что ΔАОВ = ΔСОD, откуда имеем, что AB = CD.

**5) На велотрассе одновременно уходят со старта 5 велосипедистов. Скорость первого равна 50 км/ч, скорость второго – 40 км/ч, скорость третьего – 30 км/ч, скорость четвёртого – 20 км/ч, скорость пятого – 10 км/ч. Первый велосипедист считает количество велосипедов, которых он обогнал. Какого велосипедиста он посчитал 21-м?** *(7 баллов)*

*Решение:* Из условия следует, что первый велосипедист едет быстрее второго на 10 км/ч, третьего – на 20 км/ч, четвёртого – на 30 км/ч, пятого – на 40 км/ч. Это означает, что когда первый догонит второго, он в этот момент во второй раз догонит третьего, в третий раз – четвёртого, в четвёртый раз – пятого. Значит, в этот момент у него будет 1 + 2 + 3 + 4 = 10 обгонов. В момент, когда он во второй раз обгонит второго велосипедиста, у него получится 20 обгонов, и в этот момент все велосипедисты находятся рядом. Следующим будет обгон самого медленного – пятого велосипедиста.

*Ответ:* 5 велосипедиста.

**Школьная олимпиада по математике в 11 классе.**

*Критерии оценивания*

|  |  |
| --- | --- |
| **Баллы** | **Пояснения** |
| **7** | Полное верное решение. |
| **6** | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на  решение. |
| **5** | Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не  рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после  небольших исправлений или дополнений. |
| **4** | Верно рассмотрен один из двух существенных случаев. |
| **3** | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. |
| **2** | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при  ошибочном решении). |
| **1** | Записан только ответ и он правильный, решения нет. |
| **0** | Решение неверное, продвижения отсутствуют.  Решение отсутствует и ответ неверный. |

**1) Найдите произведение:**

**(sin00 – cos00)(sin10 – cos10)…(sin890 – cos890)(sin900 – cos900).** *(7 баллов)*

*Решение:* Среди сомножителей есть разность (sin450 – cos450), равная 0, поэтому

произведение равно 0.

*Ответ:* 0.

**2) Садовод-исследователь в течение июля и августа наблюдал за своей яблоней. За каждый месяц каждое яблоко увеличивает вес в 1,5 раза, но при этом 20% хороших яблок становятся червивыми. Как и на сколько процентов изменился общий вес хороших яблок в конце августа по сравнению с началом июля, если в начале июля ни одного червивого яблока не было?** *(7 баллов)*

*Решение:* Пусть общий вес яблок на начало июля составляет а. Тогда, если бы яблоки

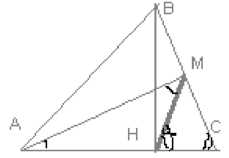
не портились, их вес на конец августа составил бы 1,52а = 2,25а. Но поскольку за месяц портились 20% из них, общий вес хороших яблок составляет 2,25а · 0,8 · 0,8 = 1,44 а. Это означает, что общий вес хороших яблок вырос на 44%.

*Ответ:* Вырос на 44%.

**3) Из колбы, содержащей 80 г 10-процентного раствора соли, отливают некоторую часть в пробирку и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли не повысится втрое. После этого полученный раствор выливают обратно в колбу. В результате содержание соли в колбе повышается на 2 процента. Какое количество раствора отливали из колбы в пробирку?** *(7 баллов)*

*Решение:*  В колбе было  граммов соли, столько же её останется и в конце, следовательно, масса раствора после переливания из пробирки составит  грамма, значит, в процессе выпаривания из пробирки испарилось  грамма воды. Чтобы при выпаривании в пробирке процентное содержание соли выросло втрое, нужно, чтобы вес раствора в пробирке уменьшился втрое, то есть испарилось две трети её начального веса. Значит, две трети начального веса пробирки равно  грамма, поэтому полный вес отлитого в пробирку раствора равен  граммов.  
*Ответ:*  20 граммов.

**4) Отрезки AM и ВН – соответственно медиана и высота треугольника ABC. Известно, что , а . Найти длину стороны ВС.** *(7 баллов)*

*Решение:* Проведём отрезок *МН*, он будет медианой прямоугольного треугольника ВНС, проведённой к гипотенузе ВС и равен её половине. Тогда  равнобедренный, поэтому , значит, , поэтому АН = НМ = МС = 1 и ВС = 2МС = 2 см.

*Ответ:* ****см.

**5) Может ли сумма 100 последовательных натуральных чисел оканчиваться той же цифрой, что и сумма следующих 98 чисел?** *(7 баллов)*

*Первое решение:* Заметим, что сумма 100 последовательных натуральных чисел

является чётным числом, так как содержит ровно 50 нечётных слагаемых. А сумма 98

последовательных натуральных чисел является нечётным числом, так как содержит ровно 49 нечетных слагаемых. Поэтому эти суммы оканчиваются на цифры разной чётности.

*Второе решение:* Заметим, что сумма 100 последовательных натуральных чисел

оканчивается на 0, а сумма никаких двух подряд идущих чисел на 0 не оканчивается. Значит, не заканчивается на 0 и сумма никаких 98 подряд идущих чисел.

*Ответ:* Не может.